

发展方程的时间依赖对称的 Lie 代数结构*

马文秀

(复旦大学数学研究所, 上海 200433)

THE LIE ALGEBRA STRUCTURES OF TIME DEPENDENT SYMMETRIES OF EVOLUTION EQUATIONS

MA WENXIU

(Institute of Mathematics, Fudan University, Shanghai 200433)

Abstract

The properties of Lie products of vector field generators introduced in Ref. [1] are discussed from which Lie algebra of vector field generators can be derived. Based on these, it is shown that the space of time dependent symmetries with exponential terms of time constitutes a Lie subalgebra of Lie algebra of vector fields. Furthermore the commutator relations of Lie algebra of symmetries of this kind are given and thus the isomorphism between it and Lie algebra of vector field generators not depending explicitly on time is presented.

§ 1. 引言

发展方程的时间依赖对称存在着许多形式限定, 譬如时间Laurent 多项式型对称只能为时间多项式型的^[1]. 转面我们已经知道: 众多著名的可积发展方程的确具有时间多项式依赖对称, 例如KdV 族和AKNS 族方程具有一阶时间多项式依赖对称^[2,3], KP 族和BO 族方程具有任意阶的时间多项式依赖对称^[4,5], 而且这些时间多项式依赖对称均具有无穷维的Lie 代数结构[2-5]. 文献[1] 提出了一类由向量场生成子(其定义参见[1]) 完全确定的带时间指数型的时间依赖对称, 这类对称包括时间多项式依赖对称作为其特例.

本文将讨论向量场生成子的一些积性质, 这些积性质表明全体向量场生成子仍构成一个Lie 代数(它们还可应用于构造高阶的向量场生成子); 进一步发现了上述带时间指数型的时间依赖对称也具有Lie 代数结构, 而且这种Lie 代数与向量场生成子Lie 代数之间存在同构关系.

下面我们阐明一下基本的符号和概念. 设 $x = (x^1, \dots, x^p)^T \in \mathbb{R}^p$, $t \in \mathbb{R}$, $u = (u^1, \dots, u^q)^T$, $u^i = u^i(x, t)$, $1 \leq i \leq q$, 均是 C^∞ -可微函数. 以 B 表示所有复(或实)的关于 x, t 是 C^∞ -可微且关于作为 x 的函数 u 是 C^∞ -Gateaux 可微的函数 $P[u] = P(x, t, u)$, $B^r =$

本文 1991 年 9 月 3 日收到.

* 国家自然科学基金资助的课题.

$\{(P_1, \dots, P_r)^T \mid P_i \in \mathcal{B}, 1 \leq i \leq r\}$. 空间 $\mathcal{B}^q$ 在下列乘积

$$[K, S] = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} K(u + \varepsilon S(u)) \Big|_{\varepsilon=0} - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} S(u + \varepsilon K(u)) \Big|_{\varepsilon=0}, \quad K, S \in \mathcal{B}^q \quad (1.1)$$

下构成一个Lie 代数^[6]. 我们始终假定 $\hat{K}$ 表示 $K \in \mathcal{B}^q$ 的伴随算子, 即 $\hat{K}S = [K, S]$, $S \in \mathcal{B}^q$, 并且总设 $\check{K}_a = \hat{K} - aI$, $a \in \mathbb{C}$, $I: \mathcal{B}^q \rightarrow \mathcal{B}^q$ 为恒等算子.

定义 1.1^[1]. 设 $K, T \in \mathcal{B}^q$, 如果存在非负整数 m 及复常数 a 使得 $\check{K}_a^{m+1}T = 0$, 则称 T 是 m 阶特征 a 的 K -生成子.

由此定义可知: 当 $\check{K}_a^m T \neq 0$ 时, T 是 m 阶特征 a 的 K -生成子 $\iff \check{K}_a^m T$ 是伴随算子 $\hat{K}$ 相应于特征值 a 的特征向量.

§ 2. 向量场生成子的积性质

为讨论向量场生成子的积性质, 我们先给出下列结果.

定理 2.1. 设 $K, T, S \in \mathcal{B}^q$, $a, b \in \mathbb{C}$, m 为非负整数. 则我们有

$$\check{K}_{a+b}^m [T, S] = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} [\check{K}_a^i T, \check{K}_b^{m-i} S]. \quad (2.1)$$

证. 可用归纳法证之. 也可按如下直接证明.

$$\begin{aligned} \check{K}_{a+b}^m [T, S] &= \sum_{i+j=m} (-1)^j \binom{m}{i} (a+b)^j \hat{K}^i [T, S] \\ &= \sum_{i+j=m} (-1)^j \binom{m}{i} \sum_{k+l=j} \binom{j}{k} a^k b^l \hat{K}^i [T, S] \\ &= \sum_{i+j=m} (-1)^j \binom{m}{i} \sum_{k+l=j} \binom{j}{k} a^k b^l \sum_{r+s=i} \binom{i}{r} [\hat{K}^r T, \hat{K}^s S] \\ &= \sum_{i+j=m} \binom{m}{i} \sum_{k+l+r+s=m} \frac{i! j!}{k! l! r! s!} (-a)^k (-b)^l [\hat{K}^r T, \hat{K}^s S] \\ &= \sum_{i+j=m} \binom{m}{i} \sum_{k+r=i} \frac{i!}{k! r!} \sum_{l+s=j} \frac{j!}{l! s!} [(-a)^k \hat{K}^r T, (-b)^l \hat{K}^s S] \\ &= \sum_{i+j=m} \binom{m}{i} [\check{K}_a^i T, \check{K}_b^j S], \end{aligned}$$

这说明定理结论为真. 证毕.

利用此结果可推出下列向量场生成子的Lie 积的基本性质.

定理 2.2. 设 $K, S, T \in \mathcal{B}^q$, $a, b \in \mathbb{C}$, m, n 为非负整数. 如果 T 和 S 分别是 m 阶特征 a 和 n 阶特征 b 的 K -生成子, 那么Lie 积 $[T, S]$ 是 $m+n$ 阶特征 $a+b$ 的 K -生成子.

证. 由定理2.1 可计算如下

$$\begin{aligned} \check{K}_{a+b}^{m+n+1} [T, S] &= \sum_{\substack{i+j=m+n+1 \\ i \geq m+1}} \binom{m+n+1}{i} [\check{K}_a^i T, \check{K}_b^j S] \\ &\quad + \sum_{\substack{i+j=m+n+1 \\ j \geq n+1}} \binom{m+n+1}{j} [\check{K}_a^i T, \check{K}_b^j S]. \end{aligned}$$

又 $\hat{K}_a^i T = 0, i \geq m+1, \hat{K}_b^j S = 0, j \geq n+1$, 故从上式可得 $\hat{K}_{a+b}^{m+n+1}[T, S] = 0$, 因此定理结果为真. 证毕.

记全体 K -生成子为 $\mathcal{G}$, 全体特征 0 的 K -生成子为 $\mathcal{G}_0$, 并令 $\mathcal{G}(x, u) = \{T \in \mathcal{G} \mid \frac{\partial T}{\partial t} = 0\}$, $\mathcal{G}_0(x, u) = \{T \in \mathcal{G}_0 \mid \frac{\partial T}{\partial t} = 0\}$, 则由定理 2.2 立刻得到

推论 2.1. 空间 $\mathcal{G}, \mathcal{G}_0$ 在由 (1.1) 定义的乘积下构成一个 Lie 代数, 并且 $(\mathcal{G}(x, u), [\cdot, \cdot])$ 和 $(\mathcal{G}_0(x, u), [\cdot, \cdot])$ 分别是 $(\mathcal{G}, [\cdot, \cdot])$ 和 $(\mathcal{G}_0, [\cdot, \cdot])$ 的 Lie 子代数.

设 $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{B}^q$ 是一个 Lie 子代数, $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{B}^q$ 是一个占优 (beautiful) Lie 子代数 (定义可参见 [1, 5]). 由定理 2.1 还可推出下列两条更为精确的 Lie 积性质.

定理 2.3. 设 $K, T, S \in \mathcal{L}_0, a, b \in \mathbb{C}, m, n$ 是非负整数且 $m+n \geq 1$, 及 $\hat{K}$ 在 $\mathcal{L}_0$ 中的特征向量集是 Abel 的, 则当 T 和 S 分别是 m 阶特征 a 和 n 阶特征 b 的 K -生成子时, Lie 积 $[T, S]$ 是 $m+n-1$ 阶特征 $a+b$ 的 K -生成子.

证. 因 $\hat{K}$ 在 $\mathcal{L}_0$ 中的特征向量集是 Abel 的, 故 $[\hat{K}_a^m T, \hat{K}_b^n S] = 0$. 于是通过 (2.1) 式我们得到

$$\begin{aligned} \hat{K}_{a+b}^{m+n}[T, S] &= \sum_{\substack{i+j=m+n \\ i \geq m+1}} \binom{m+n}{i} [\hat{K}_a^i T, \hat{K}_b^j S] + \binom{m+n}{m} [\hat{K}_a^m T, \hat{K}_b^n S] \\ &+ \sum_{\substack{i+j=m+n \\ j \geq n+1}} \binom{m+n}{j} [\hat{K}_a^i T, \hat{K}_b^j S] = 0. \end{aligned}$$

定理 2.4. 设 $K, T, S \in \mathcal{L}_0, m, n$ 是非负整数且 $m+n \geq 1$, 及 $K^\perp = \{R \in \mathcal{L}_0 \mid [R, K] = 0\}$ 是 Abel 的, 则当 T 和 S 分别是 m 阶和 n 阶特征 0 的 K -生成子时, Lie 积 $[T, S]$ 是 $m+n-1$ 阶特征 0 的 K -生成子.

证. 由假定, $[\hat{K}^m T, \hat{K}^n S] = 0$. 于是利用伴随算子 $\hat{K}$ 的 Leibniz 法则^[7] (或定理 2.1) 可得 $\hat{K}^{m+n}[T, S] = 0$, 这即为所证. 证毕.

注意占优 Lie 代数的非平凡元的定义^[1,5], 通过定理 2.4 可推得

推论 2.2. 设 $T, S \in \mathcal{L}_1, m, n$ 是非负整数且 $m+n \geq 1$, 及 $K \in \mathcal{L}_1$ 是 $\mathcal{L}_1$ 的非平凡元, 则当 T 和 S 分别是 m 阶和 n 阶特征 0 的 K -生成子时, Lie 积 $[T, S]$ 是 $m+n-1$ 阶特征 0 的 K -生成子.

在上述积性质的基础上, 我们很方便产生众多 Lie 积型的更高阶的向量场生成子, 继而得出相应的新的时间依赖对称.

§ 3. 时间依赖对称的 Lie 代数

设 $K, T \in \mathcal{B}^q, T$ 为 m 阶特征 a 的 K -生成子, 我们构造相应的向量场

$$\pi_T^{(ma)} = e^{at} \sum_{i=0}^m \frac{t^i}{i!} \hat{K}_a^i T, \quad (3.1)$$

当特征为 0 时, $\pi_T^{(ma)}$ 变为时间多项式型向量场, 这种向量场记为,

$$\sigma_T^{(m)} = \sum_{i=0}^m \frac{t^i}{i!} \hat{K}^i T. \quad (3.2)$$

令 $S_\pi = \{\pi_T^{(ma)} \mid T \in \mathcal{G}(x, u)\}$, $S_\sigma = \{\sigma_T^{(n)} \mid T \in \mathcal{G}_0(x, u)\}$. 如果 $K \in \mathcal{B}^q$, $T \in \mathcal{G}$ 均不显含 t , 则向量场(3.1) 即为发展方程

$$u_t = K = K(x, u), \quad K = K(x, u) \in \mathcal{B}^q \quad (3.3)$$

的带时间指数型的时间依赖对称^[1]. 因此 S_π 是发展方程(3.3) 的时间依赖对称空间, 文献[1] 已证明这个对称空间包含了所有带时间幂次指数型的时间依赖对称.

定理 3.1. 设 $K, T, S \in \mathcal{B}^q$, T, S 分别为 m 阶特征 a 和 n 阶特征 b 的 K -生成子, 则

$$[\pi_T^{(ma)}, \pi_S^{(nb)}] = \pi_{[T, S]}^{(m+n, a+b)}. \quad (3.4)$$

因此发展方程(3.3) 的时间依赖对称空间 $\langle S_\pi, [\cdot, \cdot] \rangle$ 是一个具有换位子关系(3.4) 的Lie 代数, 且下列映射

$$\rho: \mathcal{G}(x, u) \longrightarrow S_\pi, \quad T \longmapsto \pi_T^{(ma)} \quad (3.5)$$

(这里 T 是 m 阶特征 a 的 K -生成子) 是Lie 代数 $\langle \mathcal{G}(x, u), [\cdot, \cdot] \rangle$ 和 $\langle S_\pi, [\cdot, \cdot] \rangle$ 的Lie 代数同构.

证. 由(3.1), (2.1) 及定理2.2, 我们得到

$$\begin{aligned} [\pi_T^{(ma)}, \pi_S^{(nb)}] &= e^{(a+b)t} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \frac{t^i t^j}{i! j!} [\tilde{K}_a^i T, \tilde{K}_b^j S] = e^{(a+b)t} \sum_{r=0}^{m+n} \sum_{i+j=r} \frac{t^i t^j}{i! j!} [\tilde{K}_a^i T, \tilde{K}_b^j S] \\ &= e^{(a+b)t} \sum_{r=0}^{m+n} \frac{t^r}{r!} \sum_{i+j=r} \frac{r!}{i! j!} [\tilde{K}_a^i T, \tilde{K}_b^j S] \\ &= e^{(a+b)t} \sum_{r=0}^{m+n} \frac{t^r}{r!} \tilde{K}_{a+b}^r [T, S] = \pi_{[T, S]}^{(m+n, a+b)}, \end{aligned}$$

因而(3.4) 成立, 进一步可知 $\langle S_\pi, [\cdot, \cdot] \rangle$ 是一个Lie 代数, 其余显然. 证毕.

推论 3.1. 发展方程(3.3) 的时间多项式型对称空间 S_σ 是具有换位子关系

$$[\sigma_T^{(m)}, \sigma_S^{(n)}] = \sigma_{[T, S]}^{(m+n)}, \quad T, S \in \mathcal{G}_0(x, u) \quad (3.6)$$

的Lie 代数, 而且映射

$$\rho: \mathcal{G}_0(x, u) \longrightarrow S_\sigma, \quad T \longmapsto \sigma_T^{(m)} \quad (3.7)$$

(这里 T 是 m 阶特征0 的 K -生成子) 是Lie 代数 $\langle \mathcal{G}_0(x, u), [\cdot, \cdot] \rangle$ 和 $\langle S_\sigma, [\cdot, \cdot] \rangle$ 的Lie 代数同构.

注 3.1. W 代数型关系(3.4) 也表明了空间 $\{\pi_T^{(ma)} \mid T \in \mathcal{G}\}$ 是同构于 $\mathcal{G}$ 的Lie 代数, 而空间 $\{\sigma_T^{(m)} \mid T \in \mathcal{G}_0\}$ 是与 $\mathcal{G}_0$ 同构的Lie 代数.

相应于定理2.3, 2.4, 我们类似可得下列两条结果.

定理 3.2. 设 $K \in \mathcal{L}_0$ 的伴随算子 $\hat{K}$ 在 $\mathcal{L}_0$ 中特征向量集是Abel 的, $T, S \in \mathcal{L}_0$ 分别是 m 阶特征 a 和 n 阶特征 b 的 K -生成子, 则

$$[\pi_T^{(ma)}, \pi_S^{(nb)}] = \pi_{[T, S]}^{(m+n-1, a+b)}, \quad m+n \geq 1. \quad (3.8)$$

因此当 K 不显含 t 时, 发展方程 $u_t = K$ 的时间依赖对称空间 $\langle S_\pi, [\cdot, \cdot] \rangle$ 是一个具有换位子关系(3.8) 的Lie 代数, 而且在映射(3.5) 下与Lie 代数 $\langle \mathcal{G}(x, u), [\cdot, \cdot] \rangle$ 同构.

定理 3.3. 设 $K, T, S \in \mathcal{L}_0$, $K^\perp = \{R \in \mathcal{L}_0 \mid [R, K] = 0\}$ 是Abel 的且 T, S 分别是 m 阶和 n 阶特征0 的 K -生成子, 则

$$[\sigma_T^{(m)}, \sigma_S^{(n)}] = \sigma_{[T, S]}^{(m+n-1)}, \quad m+n \geq 1. \quad (3.9)$$

因此当 K 不显含 t 时, 发展方程 $u_t = K$ 的时间多项式型对称空间 $\langle S_\sigma, [\cdot, \cdot] \rangle$ 是一个具有换位子关系(3.9) 的 Lie 代数, 并且在映射(3.7) 下与 Lie 代数 $\langle G_0(x, u), [\cdot, \cdot] \rangle$ 同构.

注 3.2. 设 $K \in \mathcal{L}_1$ 是非平凡元, $T, S \in \mathcal{L}_1$ 分别是 m 阶和 n 阶特征 0 的 K -生成子, 那么关系式(3.9) 成立. 进一步当 K 不显含 t 时, 发展方程 $u_t = K$ 的时间多项式型对称空间 $\langle S_\sigma, [\cdot, \cdot] \rangle$ 是一个保持换位子关系(3.9) 的 Lie 代数, 并且在映射(3.7) 下同构于 Lie 代数 $\langle G_0(x, u), [\cdot, \cdot] \rangle$.

许多可积方程的时间多项式型对称 Lie 代数(可参见文献[1-5, 8-12] 及所附文献) 均包括在定理 3.3 的框架中, 文献[1] 中对变系数线性方程 $u_t = 2u + xu_x$ 给出的带时间指数型的时间依赖对称 Lie 代数包含在定理 3.1 中. 但对一般的可积方程, 我们尚未提出可行的方法去构造类似于定理 3.1 或定理 3.2 描述的时间依赖对称 Lie 代数. 使对 KdV 族和 AKNS 族可积方程, 人们甚至还不清楚它们是否具有高阶的时间多项式依赖对称. 这些问题的解决必将促进人们对发展方程时间依赖对称更深的认识.

致谢: 衷心感谢谷超豪、胡和生两位院士的热情指导!

参 考 文 献

- [1] 马文秀. 向量场的生成子与发展方程的时间依赖对称. 中国科学 A 辑, 1991, (2): 129-139 (中文); Ser.B 1991, 34 (7): 769-782 (英文).
- [2] H.H. Chen, Y.C. Lee and J.E. Lin. A New Hierarchy of Symmetries for the Integrable Nonlinear Evolution Equations. Advances in Nonlinear Waves, Vol.II (Research Notes in Math. Vol.111), Pitman, 1985, 233-239.
- [3] Y.S. Li and G.C. Zhu. New Set of Symmetries of the Integrable Equations, Lie Algebra and Non-isospectral Evolution Equations: II. AKNS System. J. Phys. A: Math. Gen., 1986, 19: 3713-3725.
- [4] W.X. Ma. The Algebraic Structures of Isospectral Lax Operators and Applications to Integrable Equations. J. Phys. A: Math. Gen., 1992, 25: 5329-5343.
- [5] B. Fuchssteiner. Mastersymmetries, Higher Order Time-dependent Symmetries and Conserved Densities of NEEs. Prog. Theor. Phys., 1983, 70 (6): 1508-1522.
- [6] S. Bowman. A Note on Hamiltonian Structure. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 1987, 102: 173-189.
- [7] Y. Chow. General Theory of Lie Algebras Vol.1, Gordon and Breach, New York, 1978.
- [8] W.X. Ma. K Symmetries and τ Symmetries of Evolution Equations and Their Lie Algebras. J. Phys. A: Math. Gen., 1990, 23 (13): 2707-2716.
- [9] 陈登远、朱国城、李翊神. KdV 型矩阵发展方程的对称及其 Lie 代数. 应用数学学报, 1990, 13 (3): 324-334.
- [10] W.X. Ma. An Approach for Constructing Nonisospectral Hierarchies of Evolution Equations. J. Phys. A: Math. Gen., 1992, 25: L719-L726.
- [11] Y. Cheng, Y.S. Li and R.K. Bullough. Integrable Non-isospectral Flows Associated with the Kadomtsev-Petviashvili Equations in 2+1 Dimensions. J. Phys. A: Math. Gen., 1988, 21: L443-L449.
- [12] K.M. Case and A. Monge. Explicitly Time-dependent Constants/Symmetries of the Higher-order KP Equations. J. Math. Phys., 1989, 30: 1250-1253.